

12.6 フーリエ変換と信号処理

音声信号などを周波数スペクトルに変換して、そのスペクトルを操作することによってより複雑な信号処理が可能となる。ここでは、離散信号を周波数変換する離散フーリエ変換と、それを高速に計算するFFT(Fast Fourier Transform)について紹介する。

12.6.1 フーリエ級数

- 対象とする信号は、周期 T の信号 $g(t)$

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(\frac{2\pi}{T}mt) + b_m \sin(\frac{2\pi}{T}mt)) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_m = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(\frac{2\pi}{T}mt) dt & m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(\frac{2\pi}{T}mt) dt & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2)$$

- $g(t)$ は、周期 T の周期関数なので、積分区間は $0 < t < T$ ではなく、 $t_0 < t < t_0 + T$ でよい。
- a_m, b_m : 周波数 $\frac{m}{T}$ の周波数成分を表す。周波数が $0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots$ の飛び飛びの値のところに成分をもち、線 スペクトルと言われる。

12.6.2 複素フーリエ級数

- フーリエ級数を複素数 $e^{i\frac{2\pi}{T}mt}$ を用いて指数形式に表現にしたもの。
- オイラーの式より、

$$\cos(\frac{2\pi}{T}mt) = \frac{1}{2} (e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + e^{-i\frac{2\pi}{T}mt}) \quad (3)$$

$$\sin(\frac{2\pi}{T}mt) = \frac{1}{2i} (e^{i\frac{2\pi}{T}mt} - e^{-i\frac{2\pi}{T}mt}) \quad (4)$$

これらを式 (1) の \sum の中の項に代入すると

$$\begin{aligned} & a_m \cos(\frac{2\pi}{T}mt) + b_m \sin(\frac{2\pi}{T}mt) \\ &= a_m \times (3) + b_m \times (4) \\ &= \frac{1}{2} (a_m - ib_m) e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + \frac{1}{2} (a_m + ib_m) e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + B_m e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} \end{aligned}$$

ただし、

$$C_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m)$$

$$B_m = \frac{1}{2}(a_m + ib_m)$$

また、

$$C_m = \bar{B}_m \quad (\text{複素共役})$$

である。よって、(1) は、次のように書きなおされる。

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + B_m e^{-i\frac{2\pi}{T}mt}) \quad (5)$$

以下では、この式をさらに整理してみる。まず、

$$C_0 \equiv \frac{a_0}{2} = C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} |_{m=0} \quad (6)$$

とし、さらに、式 (5) の右辺の $B_m e^{-i\frac{2\pi}{T}mt}$ で $m \rightarrow -m$ とすると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} = \sum_{m=-1}^{-\infty} B_{-m} e^{i\frac{2\pi}{T}mt}$$

そこで、 B_{-m} を改めて C_m ($m < 0$) で表すと、

$$= \sum_{m=-1}^{-\infty} C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \quad (7)$$

式 (6) と (7) を、式 (5) に代入すると、

$$\begin{aligned} g(t) &= C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} + \sum_{m=-1}^{-\infty} C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \end{aligned} \quad (8)$$

- ここで、 $C_m = \bar{B}_m$ であったから、次の共役の関係が成り立つ。 $B_m = C_{-m}$ より、

$$C_m = \bar{C}_{-m} \quad (9)$$

- フーリエ係数 C_m をまとめておこう。

$$C_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m) \quad (10)$$

に、式 (2) を代入して、

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) (\cos(\frac{2\pi}{T}mt) - i \sin(\frac{2\pi}{T}mt)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} dt \end{aligned} \quad (11)$$

なお、この式は複素積分の形をしているが、計算するには、

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cos(\frac{2\pi}{T}mt) dt - i \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \sin(\frac{2\pi}{T}mt) dt$$

として、二つの実積分に分けて計算すればよい。

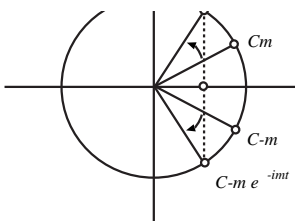


図 1: C_m と \bar{C}_m

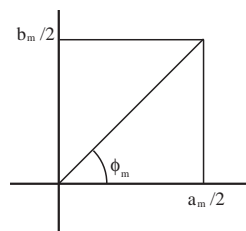


図 2: フーリエ係数

- C_m と a_m, b_m との関係

式 (10) の a_m, b_m は、式 (1) のフーリエ級数の係数であった (図 2)

$$\begin{cases} C_m \text{ の実部} = \operatorname{Re}(C_m) = \frac{1}{2}a_m \\ C_m \text{ の虚部} = \operatorname{Im}(C_m) = -\frac{1}{2}b_m \end{cases}$$

式 (1) を次の形に変形すると

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}mt + \phi_m\right)$$

ここで、

$$\left(\sin \phi_m = \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}}, \quad \cos \phi_m = \frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \right)$$

よって、

$$\begin{cases} |C_m| = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} & \Leftrightarrow \text{周波数 } \frac{m}{T} \text{ の振幅の絶対値} \\ \arg C_m = \phi_m & \Leftrightarrow \text{位相差} \end{cases}$$

12.6.3 フーリエ変換

- 複素フーリエ級数の式 (11) を、 $\omega_m = \frac{2m\pi}{T}$ とおいて、さらに積分区間を $-\frac{T}{2}$ だけずらすと (周期関数なので積分の値は変わらない)

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)e^{-i\omega_m t} dt$$

ここで、 $\frac{G(\omega_m)}{T} = C_m$ とおくと、

$$G(\omega_m) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)e^{-i\omega_m t} dt$$

となる。この式で $T \rightarrow \infty$ ($\frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$) とすると、次式に収束する。

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

これを g のフーリエ変換という。

- フーリエ級数は周期信号を変換したが、フーリエ変換は非周期信号を変換でき、周波数領域 $-\infty < \omega < \infty$ で連続なスペクトルをもつ。

12.6.4 離散フーリエ変換 (DFT, Discrete Fourier Transform)

- 名前は離散フーリエ変換だが、その実は、離散信号に対するフーリエ級数。ただし、フーリエ級数は周期信号を対象とする。そこで非周期信号に対して周期を仮定して離散時間フーリエ級数を計算したものが離散フーリエ変換であると考えられる。
- 図 3 に示すように、離散的に連続する信号から、長さ T の区間の信号を切り出してきて、それを繰り返すつないで、周期 T の関数と見なす (基本周波数 $\frac{1}{T}$ 、角周波数 $\frac{2\pi}{T}$)。
- 時間軸領域の離散化
 - サンプリング間隔 Δ (サンプリング周波数 $S_r = 1/\Delta$)
 - 分割数 N

$$T = N\Delta$$

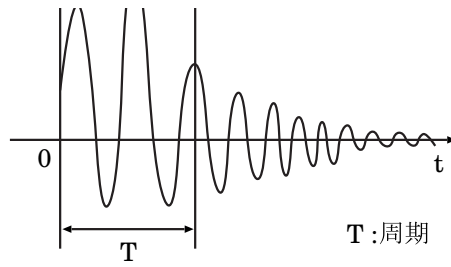


図 3: 非周期信号から長さ T の区間を切り出し、周期 T の信号と考える。

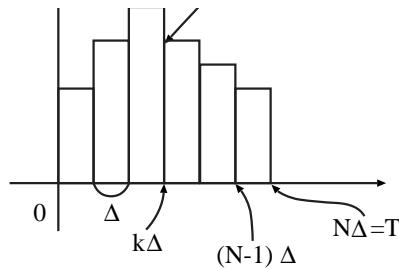


図 4: フーリエ係数を求める積分を矩形領域の和として近似

- 図 4 に示すように、式 (11) の積分を長方形の面積の和で表すと、

$$C_m = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \left(g(k\Delta) e^{-i\frac{2\pi}{T}mk\Delta} \cdot \Delta \right)$$

ここで、 $g(k\Delta) = g_k$ (第 k 番目のサンプル値) とおき、また Δ を \sum の外に括り出す。

$$= \frac{\Delta}{T} \left(\sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\frac{2\pi}{T}mk\Delta} \right)$$

そして、 $\Delta/T = 1/N$ の関係を使うと、

$$C_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} \quad m \in (-\infty, \infty) \quad (12)$$

このような計算を離散フーリエ変換 (DFT) といい、DFT 数 G_m を $G_m = NC_m$ で定義する。

$$G_m \equiv NC_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} \quad m \in (-\infty, \infty) \quad (13)$$

- 帯域制限 (m の制限)

G_m は、周波数 $\frac{m}{T}$ のスペクトル成分を表す。サンプリング周波数 S_r が標本化定理に従って選ばれているとすると、 $g(t)$ は、 $S_r = \frac{1}{\Delta}$ の $\frac{1}{2}$ 以下の周波数成分しか含まないので、

$$-\frac{1}{2\Delta} \leq \frac{m}{T} \leq \frac{1}{2\Delta}$$

この辺々に $T = N\Delta$ を掛けると、

$$-\frac{N}{2} \leq m \leq \frac{N}{2}$$

式 (11) では、 $m \in (-\infty, \infty)$ であったが、上式の範囲外の m の G_m は 0 としてよい。従って、DFT 係数は、

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} \quad -\frac{N}{2} \leq m \leq \frac{N}{2} \quad (14)$$

- 式 (14) は、一見複雑な式だが、

$$W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$$

とおくと

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{mk}$$

- 対称性

G_m の共役を取ってみると、

$$\begin{aligned} \overline{G_m} &= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_k W_N^{km}} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \overline{(e^{-i\frac{2\pi}{N}})^{km}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k (W_N^{-1})^{km} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{-km} = G_{-m} \end{aligned}$$

よって、 $\overline{G_m} = G_{-m}$ となり、このことから、次の関係が成り立つ。

- $G_m = a_m + b_m i$ 、 $G_{-m} = a_{-m} + b_{-m} i$ と表すと、

$$a_m = a_{-m} \quad (\text{実部は正負で線対称})$$

$$b_m = -b_{-m} \quad (\text{虚部は原点に対して点对称})$$

- $|G_{-m}| = |G_m|$

つまり、図 5 に示すように、 N 個の信号を DFT 変換すると、0 を中心にして、左右に $\frac{N}{2}$ 個のスペクトルが対称に現れる。

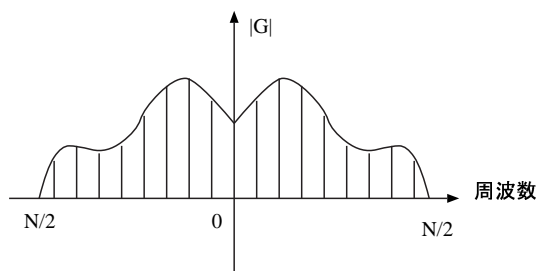


図 5: DFT スペクトルの対称性

- G_m の周期性を用いた公式 (m が負の成分をシフト)

$(W_N)^N = (e^{-i\frac{2\pi}{N}})^N = e^{-i2\pi} = 1$ の関係を使うと、 $(W_N)^{n+N} = (W_N)^n (W_N)^N = (W_N)^n$ となる。一般に、 $(W_N)^n = (W_N)^{\text{mod}(n,N)}$

これを使って G_{m+N} を計算してみると、

$$G_{m+N} = \sum_k g_k W_N^{(N+m)k} = G_m$$

よって、 $-\frac{N}{2} \leq m < 0$ で G_m を求める代わりに、それに N を加えた $\frac{N}{2} \leq m < N$ で G_m を求めてもよい。

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{km} \quad \underline{m = 0, \dots, N-1}$$

ただし、 $m \geq \frac{N}{2}$ の G_m は、元の G_{m-N} ($m-N$ は負) に相当する。

$$G_{m-N} = G_m \quad (m \geq \frac{N}{2})$$

● まとめ

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{km} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (15)$$

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} G_m W_N^{-km} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

この第2式は、DFTの逆変換で逆離散フーリエ変換 (IDFT, Inverse Discrete Fourier Transform) と呼ばれる。 $g_k = g(k\Delta)$ であるから、式(8)で $t = k\Delta$ とすると、

$$g_k = g(k\Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\frac{2\pi}{T}mk\Delta} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} G_m e^{i\frac{2\pi}{N}mk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} G_m W_N^{-km}$$

ここで、 \sum は G_m の定義される範囲だけで加えればよく、また、 $C_m = \frac{1}{N} G_m$ と $\Delta/T = 1/N$ の関係を用いた。

● 8点DFTの計算例

N 個のデータ点を使ったDFTを” N 点DFT”という。 $N=8$ の時の G_0, G_1 と G_2 を具体的に計算してみよう。

$$G_0 = \sum_{k=0}^7 g_k W_8^{0 \cdot k} = \sum_{k=0}^7 g_k W_8^0 = \sum_{k=0}^7 g_k = g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_7$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{k=0}^7 g_k W_8^{1 \cdot k} = \sum_{k=0}^7 g_k W_8^k \\ &= g_0 W_8^0 + g_1 W_8^1 + g_2 W_8^2 + g_3 W_8^3 + g_4 W_8^4 + g_5 W_8^5 + g_6 W_8^6 + g_7 W_8^7 \\ &= g_0 + g_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} + g_2 e^{-i\frac{\pi}{2}} + g_3 e^{-i\frac{3\pi}{4}} + g_4 e^{-i\pi} + g_5 e^{-i\frac{5\pi}{4}} + g_6 e^{-i\frac{3\pi}{2}} + g_7 e^{-i\frac{7\pi}{4}} \\ &= g_0 + g_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + g_2 (-i) + g_3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\quad + g_4 + g_5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + g_6 i + g_7 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{k=0}^7 g_k W_8^{2 \cdot k} \\ &= g_0 W_8^{2 \cdot 0} + g_1 W_8^{2 \cdot 1} + g_2 W_8^{2 \cdot 2} + g_3 W_8^{2 \cdot 3} + g_4 W_8^{2 \cdot 4} + g_5 W_8^{2 \cdot 5} + g_6 W_8^{2 \cdot 6} + g_7 W_8^{2 \cdot 7} \\ &= g_0 W_8^0 + g_1 W_8^2 + g_2 W_8^4 + g_3 W_8^6 + g_4 W_8^8 + g_5 W_8^{10} + g_6 W_8^{12} + g_7 W_8^{14} \\ &= \dots \end{aligned}$$

- 具体例を図6に示す。 $\frac{N}{2} < m < N$ の G_m は G_{m-N} ($G_m = G_{m-N} = \bar{G}_{N-m}$) を表しているため、図6では $N = 8$ より、 $4 < m < 8$ に対して

$$\begin{cases} G_5 = G_{-3} = \bar{G}_3 \\ G_6 = G_{-2} = \bar{G}_2 \\ G_7 = G_{-1} = \bar{G}_1 \end{cases}$$

G_4 を中心として、 G_1, G_2, G_3 と G_5, G_6, G_7 の、実部は線対称、虚部は点対称となる。

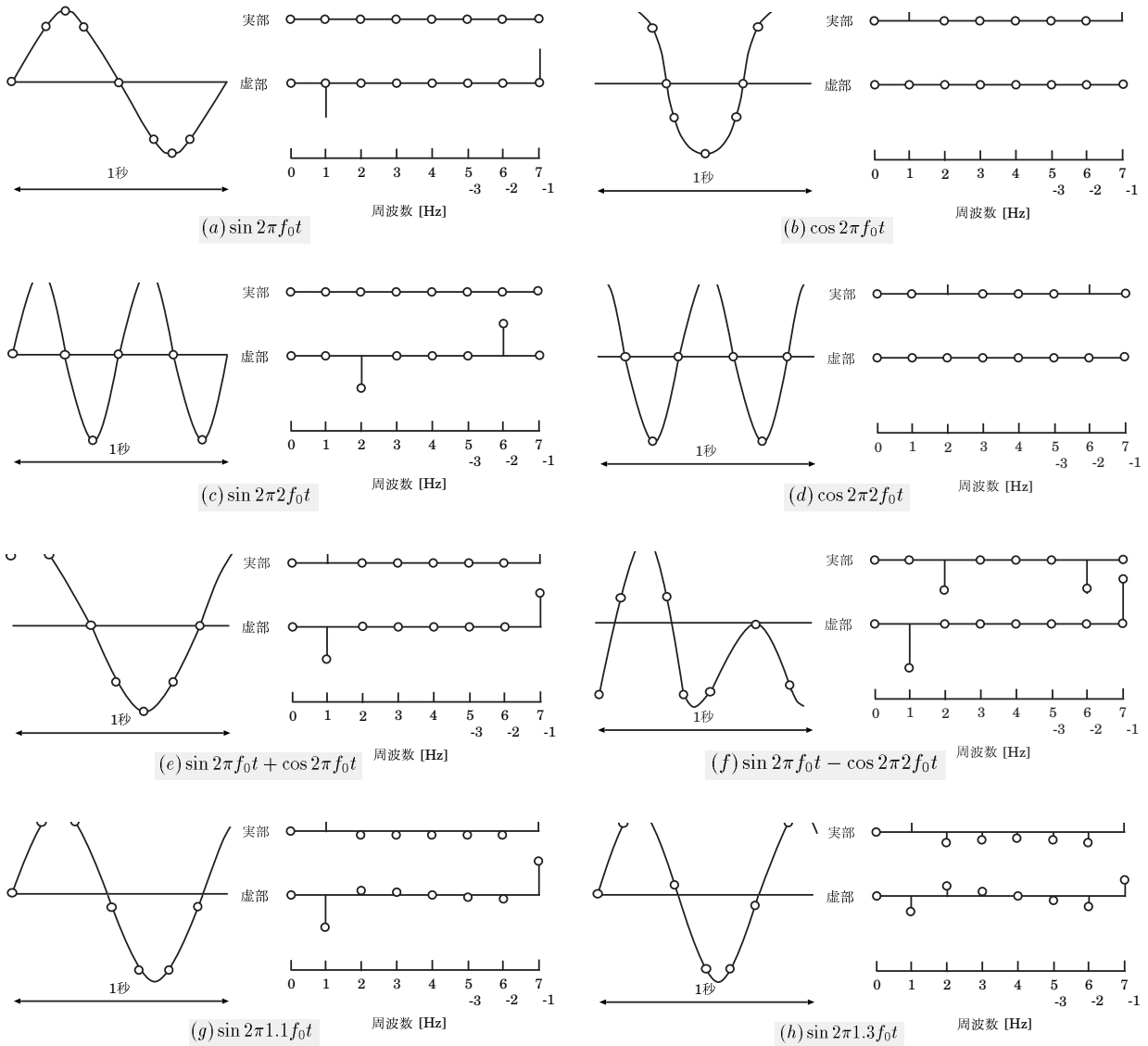


図6: 正弦波およびその重ね合わせのDFTの例 ($f_0 = 1Hz$; サンプル周波数 $8Hz$ の場合)

12.6.5 FFT (Fast Fourier Transform)

- DFT を高速に計算する方法がFFTである。
- DFT の計算量

$N = 4$ の場合を考えてみる。

$$\begin{aligned}
 G_0 &= \sum_{k=0}^3 g_k W_4^{0k} = g_0 W_4^0 + g_1 W_4^0 + g_2 W_4^0 + g_3 W_4^0 \\
 G_1 &= \sum_{k=0}^3 g_k W_4^{1k} = g_1 W_4^0 + g_1 W_4^1 + g_2 W_4^2 + g_3 W_4^3 \\
 G_2 &= \sum_{k=0}^3 g_k W_4^{2k} = g_1 W_4^0 + g_1 W_4^2 + g_2 W_4^4 + g_3 W_4^6 \\
 G_3 &= \sum_{k=0}^3 g_k W_4^{3k} = g_1 W_4^0 + g_1 W_4^3 + g_2 W_4^6 + g_3 W_4^9
 \end{aligned}$$

これを行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

一つの G_m を計算するのに、乗算が 4 回と加算が 3 回必要なことがわかる。よって、すべての G_m を計算するには、乗算が 4×4 回と加算が 4×3 回必要である。よって、一般に N 個のデータの DFT には、乗算が N^2 回と加算が $N(N-1)$ 回必要なことがわかるだろう。

FFT は、この計算回数を、それぞれ $(N/2)(\log_2(N-1))$ と $N \log_2 N$ までに減らす計算方法であり、非常に高速な計算方法である。

- 基数 2 の周波数間引き型 FFT

データの数 N を 2 のべき乗とする。例えば、 $N = 2^2 = 4$ や $N = 2^{10} = 1024$ である。

- $N = 2$ の場合

$$G_0 = g_0 W_2^0 + g_1 W_2^0 = g_0 + g_1$$

$$G_1 = g_0 W_2^0 + g_1 W_2^1 = g_0 - g_1$$

これを行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

ここで、 2×2 行列 W_2 を次のように定義する。

$$W_2 \equiv \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

これを図で表すと、図 7 のようになる。

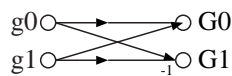


図 7: 2 点 FFT の計算の流れ

- 次に、 $N = 4$ の場合を考える (式 (17))。まず、添え字 $m = 0, 1, 2, 3$ を次のように変換し、 G_m を並び替える。

- m を 2 進数で表す。
- ビットの並びを逆転する。
- 10 進数に戻し、 m' とする。

m	2 進数	逆転	m'
0	00	00	0
1	01	10	2
2	10	01	1
3	11	11	3

式 (17) の G_i を m' の順に並べ替える。

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

このように、周波数領域の G_m を並び替えることから、周波数間引き型 FFT と呼ばれる。時間領域の並び替えを行う方法もあり、時間間引き型 FFT と呼ばれる。

- この 4×4 行列を W_4 とする。

$$W_4 \equiv \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}$$

これを 4 つのブロックに分けて考える。

$$W_4 \equiv \left[\begin{array}{cc|cc} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ \hline W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

A, B, C, D について調べて見る。

$$A = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^4 & W_4^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} = A$$

ここで、 $W_N^{2k} = (e^{-i\frac{2\pi}{N}})^{2k} = (e^{-i\frac{2\pi}{N/2}})^k = W_{N/2}^k$ の関係を使うと、 $W_4^0 = W_2^0$ 、 $W_4^2 = W_2^1$ であるから、

$$A = B = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} = W_2$$

一方、

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^1 \\ W_4^0 & W_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^0 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^0 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} = \mathbf{W}_2 \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbf{V}_2 \equiv \begin{bmatrix} W_4^0 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^2 & W_4^5 \end{bmatrix} = W_4^2 \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^1 \\ W_4^0 & W_4^3 \end{bmatrix} = W_4^2 C = -1 \cdot \mathbf{W}_2 \mathbf{V}_2$$

以上をまとめると

$$\mathbf{W}_4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \hline \mathbf{W}_2 \mathbf{V}_2 & -\mathbf{W}_2 \mathbf{V}_2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

ここで、 \mathbf{O}_2 は 2×2 の零行列で、 \mathbf{I}_2 は 2×2 の単位行列。

よって、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

さて、この式の右辺の右から三つの項の掛け算を

$$\begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

と表すと、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix}$$

となり、これは次の二つの2点FFTを計算していることに等しいことが分かるだろう。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{W}_2 \begin{bmatrix} g'_0 \\ g'_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{W}_2 \begin{bmatrix} g'_2 \\ g'_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 行列の要素を書き出せば、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_2 & \\ \hline & \mathbf{W}_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & W_4^0 & \\ & & & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

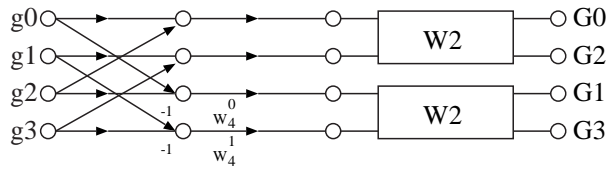


図 8: 4 点 FFT の計算の流れ。 W_2 は 2 点 FFT。

ここで、行列の要素がブランクのところは 0 である。これを図で表すと、図 8 のようになる。

- $N = 2^3 = 8$ の場合の 8 点 FFT は、同様にして 4 点 FFT に帰着できる。まず、添え字を並び替える。操作は 4 点 FFT と同じ。

m	2 進数	逆順	m'
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

m' の順に G_i を並べて、

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_4 \\ G_2 \\ G_6 \\ G_1 \\ G_5 \\ G_3 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4 & O_4 \\ O_4 & W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & O_4 \\ O_4 & V_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W_4 & O_4 \\ O_4 & W_4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & W_8^0 & & & \\ & & & & & W_8^1 & & \\ & & & & & & W_8^2 & \\ & & & & & & & W_8^3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix}$$

これを図で表すと、図 9 のようになる。

- FFT の計算量

計算の流れ図で見ると、FFT の計算が図 10 に示す演算の組み合わせになっていることが分かるだろう。これをバタフライ演算という。

N 点の FFT をやるための、バタフライ演算の段数は、 $\log_2 N$ となる。各段で $N/2$ 回のバタフライ演算が行われる。また、各バタフライ演算では、2 回の加

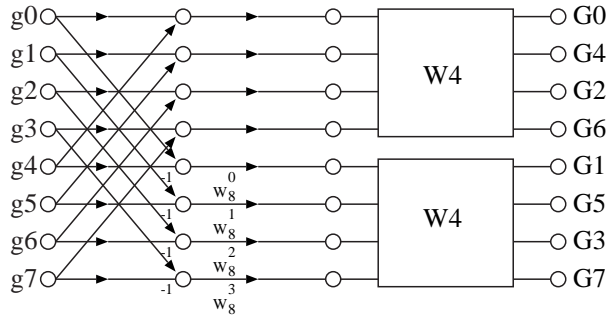


図 9: 8 点 FFT の計算の流れ。 W_4 は 4 点 FFT。

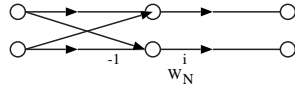


図 10: バタフライ演算

算が行われるので、加算の回数は、

$$\log_2 N \times \frac{N}{2} \times 2 = N \log_2 N$$

一方乗算は、 W_N^i を掛けるところでだけ行われる。最後の 2 点 FFT のステージでは乗算がないので、乗算が行われるステージの数は、 $\log_2 N - 1$ となる。それらの各ステージで $N/2$ 回の乗算が行われるので、乗算の回数は

$$(\log_2 N - 1) \times \frac{N}{2}$$

となる。

12.6.6 離散コサイン変換 (DCT, Discrete Cosine Transform)

- 離散コサイン変換 (DCT) は DFT の変形と考えることができる。DCT はすべての計算を実数で行うので、DFT より簡単といえる。
- DCT は、図 11 のように、 N 個のデータ N 個のデータ g_0, g_1, \dots, g_{N-1} を鏡像に反転して並べた $2N$ 個のデータに対して離散フーリエ変換を適用する。つまり、 g_0, g_1, \dots, g_{N-1} を反転して $g_{N-1}, g_{N-2}, \dots, g_0$ をつくり、それらをつないで次のような $2N$ 個のデータからなる信号を作る。

$$g_{N-1}, g_{N-2}, \dots, g_0, g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$$

この左半分の添え字を先頭から $-N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1$ と付け替え、改めて次のデータ g'_k を定義する。

$$g'_{-N}, g'_{-N+1}, g'_{-N+2}, \dots, g'_{-1}, g'_0, g'_1, \dots, g'_{N-1}$$

g'_k を式 (15) と (16) を用いて離散フーリエ変換し G'_m を計算すると、次式を得る。

$$G'_m = \sum_{k=-N}^{N-1} g'_k W_{2N}^{mk} \quad (18)$$

$$g'_k = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km} \quad (19)$$

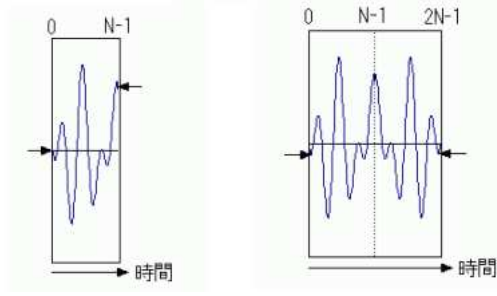


図 11: 離散コサイン変換、DCT

まず、式 (18) を調べてみる。Σ を分解して

$$G'_m = \sum_{k=0}^{N-1} g'_k W_{2N}^{mk} + \sum_{k=-N}^{-1} g'_k W_{2N}^{mk}$$

右辺第 1 項は、 $k = 0, \dots, N-1$ では、 $g'_k = g_k$ なので、

$$\text{右辺第 1 項} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_{2N}^{mk}$$

右辺第 2 項は、 $k' = -k-1$ とおき、 $k' = 0, \dots, N-1$ で $g'_{-k'-1} = g_{k'}$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} \text{右辺第 2 項} &= \sum_{k'=N-1}^0 g'_{-k'-1} W_{2N}^{m(-k'-1)} \\ &= \sum_{k'=N-1}^0 g_{k'} W_{2N}^{m(-k'-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_{2N}^{m(-k-1)} \end{aligned}$$

総和の上限と下限を入れ替えて、 k' を k に置き換えると、

以上より G'_m は次のようになり、さらに変形を加えると、

$$\begin{aligned} G'_m &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k (W_{2N}^{mk} + W_{2N}^{m(-k-1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_{2N}^{-\frac{1}{2}m} (W_{2N}^{m(k+\frac{1}{2})} + W_{2N}^{m(-k-\frac{1}{2})}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_{2N}^{-\frac{1}{2}m} (e^{-i\frac{2\pi}{2N}m(k+\frac{1}{2})} + e^{-i\frac{2\pi}{2N}m(-k-\frac{1}{2})}) \\ &= W_{2N}^{-\frac{1}{2}m} \sum_{k=0}^{N-1} g_k 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}m\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

ここで、次式のように G_m を定義する。

$$G_m \equiv \frac{1}{2} W_{2N}^{\frac{1}{2}m} G'_m \quad (20)$$

これを用いて、

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cos \frac{m\pi(2k+1)}{2N} \quad (21)$$

このように、 G_m が実数となり、元の（折り返す前の） N 個のデータから、複素数を使わずにコサイン関数の和として DCT 係数 G_m を表現できる。

式 (21) では、 k は 0 から $N-1$ まで動くのに対して、 m は、 $-N$ から $N-1$ まで動くが、次のような性質がある。まず $m = -N$ に対して、

$$\begin{aligned} G'_{-N} &= W_{2N}^{-\frac{1}{2}(-N)} \sum_{k=0}^{N-1} g_k 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}(-N)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= W_{2N}^{\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k 2 \cos(-\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)) = 0 \end{aligned}$$

よって、 $G'_{-N} = G_{-N} = 0$ となる。また、

$$\begin{aligned} G'_{-m} &= W_{2N}^{-\frac{1}{2}(-m)} \sum_{k=0}^{N-1} g_k 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}(-m)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \overline{W_{2N}^{-\frac{1}{2}m}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k 2 \cos\left(\frac{\pi}{N}(-m)\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \overline{G'_m} \end{aligned}$$

次に、上の関係式も用いて、式 (19) で与えられた逆変換を計算してみる。式 (21) のように、順変換では g_k しか使わないので、式 (19) も g_k だけについて（つまり g'_k の内 $k = 0, 1, \dots, N-1$ についてだけ）計算すればよい。

$$g_k = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km}$$

この式の Σ の項を四つに分解する。

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km} &= G'_{-N} W_{2N}^{kN} + G'_0 W_{2N}^0 + \sum_{m=1}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km} + \sum_{m=-N}^{-1} G'_m W_{2N}^{-km} \\ &= G'_{-N} W_{2N}^{kN} + G'_0 + \sum_{m=1}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km} + \sum_{m=-N+1}^{-1} G'_m W_{2N}^{-km} \end{aligned}$$

右辺第 1 項は、上で示したように 0 で、第 2 項は、式 (20) より、

$$G'_0 = 2G_0$$

第 3 項は、(G'_m を G_m に書き直すために) $(2W_{2N}^{-\frac{m}{2}})(\frac{1}{2}W_{2N}^{\frac{m}{2}}) = 1$ を G'_m に乗じて、次のように変形する。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N-1} G'_m W_{2N}^{-km} &= \sum_{m=1}^{N-1} (2W_{2N}^{-\frac{m}{2}}) \left(\frac{1}{2}W_{2N}^{\frac{m}{2}}\right) G'_m W_{2N}^{-km} \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} (2W_{2N}^{-\frac{m}{2}}) G_m W_{2N}^{-km} \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} 2G_m W_{2N}^{-m(k+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

右辺第 4 項は、 $m' = -m$ において、第 3 項と同様にして、さらに、 $G'_{-m} = \overline{G'_m}$ を用いると、

$$\begin{aligned}
\sum_{m'=N-1}^1 G'_{-m'} W_{2N}^{km'} &= \sum_{m'=1}^{N-1} \overline{G'_m} W_{2N}^{km'} \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} (2W_{2N}^{\frac{m}{2}}) \left(\frac{1}{2} \overline{W_{2N}^{\frac{m}{2}}}\right) \overline{G'_m} W_{2N}^{km} \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} (2W_{2N}^{\frac{m}{2}}) \frac{1}{2} \overline{W_{2N}^{\frac{m}{2}}} G'_m W_{2N}^{km} \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} 2\overline{G'_m} W_{2N}^{\frac{m}{2}} W_{2N}^{km} \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} 2G_m W_{2N}^{m(k+\frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

最後に、 G_m が実数であることから $G_m = \overline{G'_m}$ を用いた。以上をまとめて、

$$\begin{aligned}
g_k &= \frac{1}{2N} (2G_0 + \sum_{m=1}^{N-1} 2G_m (W_{2N}^{-m(k+\frac{1}{2})} + W_{2N}^{m(k+\frac{1}{2})})) \\
&= \frac{2}{N} \left(\frac{1}{2} G_0 + \sum_{m=1}^{N-1} G_m \cos \frac{m\pi(2k+1)}{2N} \right)
\end{aligned}$$

- このように、元の N 個のデータを対称に並べ替えて $2N$ 個のデータにして離散フーリエ変換を適用すると、次のような、実数でコサイン関数からなる式を導くことができる。

$$G_m = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cos \frac{m\pi(2k+1)}{2N} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

これを DCT という。DCT 係数を使って、元の信号 g_k は、次の逆離散コサイン変換で表される。

$$g_k = \frac{2}{N} \left(\frac{1}{2} G_0 + \sum_{m=1}^{N-1} G_m \cos \frac{m\pi(2k+1)}{2N} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

なお、 G_m と g_k の係数の取り方にいくつかの流儀がある。DCT については、画像の節でさらに説明する。

12.6.7 フーリエ変換の音声信号への応用

- FFT/DCT フィルタ
デジタルフィルタによる処理は時間領域の中で行われたが、FFT では、信号を時間領域から周波数領域へ変換することができるので、音声の周波数スペクトルを直接処理することができるようになる。つまり、この周波数スペクトルを目的に合わせて変形し、それを IDFT で音声信号に戻すことによってフィルタリングなどを行うことができる。DCT も利用される。
- 知覚符号化による圧縮
人間の聴覚には、最小可聴限界特性と聴覚マスキング効果という特性があり、これを利用して高能率符号化を行う。最小可聴限界特性とは、人間はあるレベルより小さい音を聞き取ることができないことで、この特性が周波数に依存している。聴覚マスキング効果とは、ある周波数の大きな音がある場合、その周辺の周波数の音は隠れて聞き取れなくなることをいう。

そこで、入力されたオーディオ信号を、所定のサンプル数毎にブロック化し、それを周波数変換して周波数スペクトルを求め、それを元に周波数の区間毎に聴覚のマスクングを計算し、予め設定された周波数帯域ごとの許容する量子化雑音に基づいて、フーリエ係数を量子化し圧縮する。これによって、MPEG (Moving Picture Coding Experts Group) などの方式では、高い圧縮率を得ている。